



Kangourou Italia
Gara del 15 marzo 2001
Categoria Student

Per studenti di quarta e quinta superiore

Regole:

- *La prova è individuale. E' vietato l'uso di calcolatrici di qualunque tipo.*
- *Vi è una sola risposta esatta per ogni quesito. Le risposte esatte fanno sommare 3, 4 o 5 punti secondo la loro difficoltà (3 punti per i primi 10 quesiti, 4 punti per i quesiti da 11 a 20, 5 punti per gli ultimi 10). Ogni risposta errata fa sottrarre un quarto del suo valore in punti: si tolgono 0.75 punti per una risposta errata a un quesito da 3 punti, 1 punto se il quesito è da 4 punti, 1.25 se è da 5 punti. Se ad un quesito non viene data alcuna risposta il punteggio attribuito è 0. Ad esempio: se si risponde correttamente a 3 quesiti da 4 punti e si risponde in modo errato ad un quesito da 5 punti, il punteggio relativamente a questi quattro quesiti sarà $3 \times 4 - 1.25 = 10.75$.*
- *Durata della prova: un'ora e quindici minuti. Inserite le vostre risposte nelle corrispondenti caselle della scheda delle risposte.*

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Giuseppe ha 100 topolini ognuno dei quali è o bianco o grigio. Comunque si scelga un gruppo di sette topolini, almeno quattro sono bianchi. Qual è il massimo numero di topolini grigi che Giuseppe può avere?
(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 93 (E) 99.
2. Qual è il massimo numero di palline di legno di raggio 1 cm che è possibile inserire in una scatola di forma cubica di volume 64 cm^3 ?
(A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64 (E) 128.

3. Se $\log_2 10 = a$ allora $\log_{10} 2$ vale

- (A) $2a$ (B) $\frac{a}{2}$ (C) $5a$ (D) $\frac{a}{5}$ (E) $\frac{1}{a}$.

4. Quanti sono i numeri interi positivi non primi minori di 1000 la somma delle cui cifre (in rappresentazione decimale) valga 2?

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) un numero diverso dai precedenti.

5. Qual è la probabilità che, scegliendo a caso un numero di 3 cifre (significative), esso sia pari e maggiore di 399?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{1}{9}$.

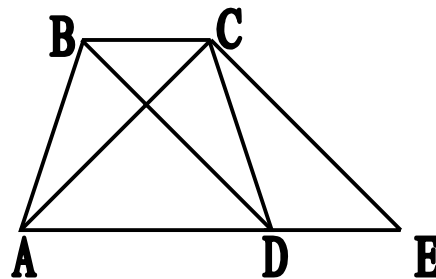
6.

$$\frac{\overbrace{9999 \dots 9999}^{18 \text{ cifre}}}{999999999} - 1 =$$

- (A) 9^9 (B) $9^9 - 1$ (C) 9^{10} (D) 10^9 (E) 10^{10} .

7. Nella figura a fianco BC è parallelo ad AE e BD è parallelo a CE. Se x è l'area del quadrilatero ABCD e y l'area del triangolo ACE, allora

- (A) $x = y$ (B) $x = 2y$ (C) $2x = y$
(D) e' vera una diversa relazione tra x e y
(E) e' impossibile determinare con questi soli dati, quale relazione valga tra x e y .



8. Il numero delle diverse quaterne di interi positivi (x, y, z, t) tali che $x < y < z < t$ e $xyzt - 1 = 2001$, è uguale a

- (A) 10 (B) 7 (C) 6 (D) 4 (E) 1.

9. Due ciclisti partono dallo stesso punto alle 14.10. Il primo va verso nord ad una velocità di 32 km / h, mentre il secondo va verso est ad una velocità di 24 km / h. La distanza fra loro sarà di 130 km alle

- (A) 16.10 (B) 16.20 (C) 17.10 (D) 17.25 (E) 17.35.

10. m è un intero positivo tale che $\text{MCD}(m, 35) > 10$. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(A) la rappresentazione decimale di m ha almeno 3 cifre

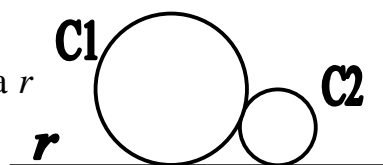
(B) m è multiplo di 35 (C) m è divisibile per 15 (D) m è divisibile per 25

(E) m è divisibile o per 5 o per 7 ma non per entrambi.

Nota: $\text{MCD}(a, b)$ indica il massimo comune divisore tra a e b .

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Due circonferenze $C1$ e $C2$ di raggio diverso sono tangenti esternamente e tangono entrambe la stessa retta r (v. figura). Quale delle seguenti affermazioni è vera?



(A) Non esiste alcuna circonferenza tangente a $C1$, $C2$ ed a r

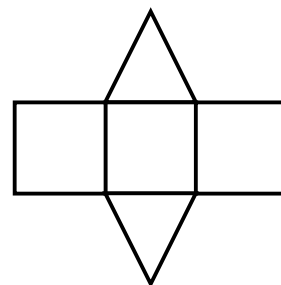
(B) Esiste una ed una sola circonferenza tangente a $C1$, $C2$ ed a r

(C) Esistono esattamente due circonferenze tangenti a $C1$, $C2$ ed a r

(D) Esistono esattamente quattro circonferenze tangenti a $C1$, $C2$ ed a r

(E) Nessuna delle affermazioni (A), (B), (C), (D) è vera.

12. La figura a fianco mostra lo sviluppo piano di un solido delimitato da tre quadrati di lato 4 cm e due triangoli equilateri. Qual è il volume del solido?



(A) $16\sqrt{3} \text{ cm}^3$ (B) 32 cm^3 (C) $\frac{64}{3} \text{ cm}^3$ (D) $32\sqrt{3} \text{ cm}^3$ (E) 64 cm^3 .

13. A New York 16 pacchetti di gomma da masticare costano tanti dollari quanti sono i pacchetti che si riescono a comperare con un dollaro. Quanti centesimi costa un pacchetto? (1 dollaro = 100 centesimi).



(A) 4 (B) 8 (C) 12 (D) 16 (E) 25.

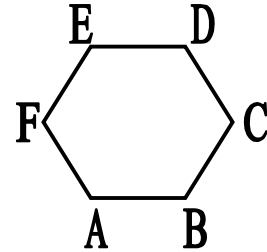
14. Sia 1, 4, 9, 16, ... la successione dei quadrati dei numeri naturali. Il numero 10^8 è un termine di questa successione. Quale dei seguenti numeri è il termine successivo della successione?

(A) $(10^4 + 1)^2$ (B) $(10^8 + 1)^2$ (C) $(10^5)^2$ (D) $(10^8)^2$ (E) $(10^4)^2 + 1$.

15. ABCDEF è un esagono regolare. Allora il vettore

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} + 2 \cdot \overrightarrow{AF}$$

coincide con il vettore



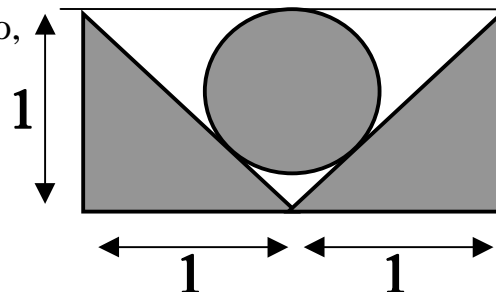
(A) \overrightarrow{AA} (B) \overrightarrow{CA} (C) \overrightarrow{FD} (D) \overrightarrow{FB} (E) \overrightarrow{CE} .

16. In un torneo fra 4 squadre di calcio (ogni squadra ha giocato contro ogni altra squadra una ed una sola volta), la classifica finale è la seguente: squadra A 7 punti, squadra B 4 punti, squadra C 3 punti, squadra D 3 punti. (Nelle partite di calcio una squadra ottiene 3 punti quando vince, 1 punto quando pareggia, 0 punti in caso di sconfitta). Come è finito l'incontro tra la squadra A e la D?

(A) A ha necessariamente vinto (B) hanno pareggiato (C) D ha necessariamente vinto (D) dipende dal risultato della sfida tra A e B (E) dipende dal risultato della sfida tra A e C.

17. Quanto vale l'area della figura in grigio, formata da due triangoli e da un cerchio?

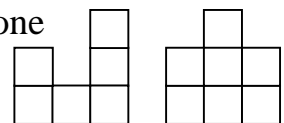
(A) 1 (B) $\pi + 1$
(C) $\pi / 4 + 1$ (D) $\pi (3 - 2\sqrt{2}) + 1$
(E) $\pi \sqrt{2} / 2 + 1$.



18. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 0,9 cm mentre le lunghezze dei cateti sono a cm e b cm. Qual è il più piccolo tra i seguenti numeri?

(A) $a^2 + b^2$ (B) $(a + b)^2$ (C) 0,9 (D) $a + b$ (E) ab .

19. A fianco avete la vista da sinistra e frontale di una costruzione ottenuta accostando piccoli cubi. Quanti cubetti sono stati usati? Vengono richiesti il numero minimo ed il numero massimo di cubetti compatibili con le raffigurazioni mostrate.



(A) 7 e 13 (B) 8 e 13 (C) 7 e 15 (D) 7 e 16 (E) 8 e 16.

20. Un triangolo equilatero CDE viene costruito esternamente ad un quadrato ABCD sul lato CD. Quanti gradi misura l'angolo AEC?
 (A) 30° (B) 36° (C) 45° (D) 54° (E) 60° .

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Trova la lunghezza del lato maggiore del rettangolo presentato nella figura (il lato minore misura 1), sapendo che le figure rotonde sono tutte cerchi.



- (A) $-2 + \sqrt{5}$ (B) $\frac{-2 + \sqrt{5}}{2}$ (C) 2.5 (D) $\sqrt{5}$ (E) $2\sqrt{5}$.

22. Le celle di una griglia di 43 righe \times 43 colonne sono colorate con 4 colori 1, 2, 3, 4 come mostrato nella figura. Quale colore è usato più spesso rispetto ad ognuno degli altri tre?

1	2	3	4	1	2		...	
2	3	4	1	2	3		...	
3	4	1	2	3			...	
4	1	2	3				...	
1	2	3					...	
2	3						...	
							...	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

- (A) colore 1 (B) colore 2 (C) colore 3
 (D) colore 4 (E) nessuno.

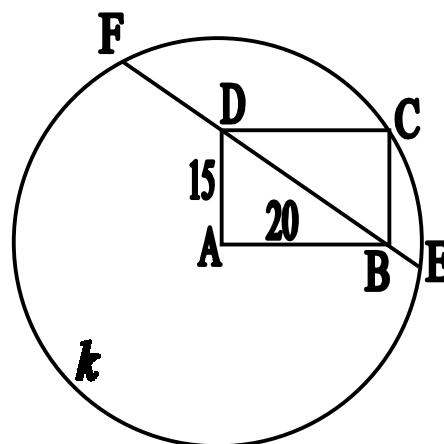
23. Per ogni numero intero positivo n calcoliamo la somma delle sue cifre (in rappresentazione decimale), poi la somma delle cifre del numero ottenuto e così via, fino ad ottenere un numero di una sola cifra che viene denotato con $w(n)$. Il numero $w(2001^{2001})$ è uguale a
 (A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9.

24. Quante fra le coppie di cifre 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 possono essere la coppia delle ultime due cifre del quadrato perfetto di un numero intero?
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) più di 4.

25. Siano m e n due numeri interi positivi tali che $\log_{10} m = 12.3\dots$ e $\log_{10} n = 15.4\dots$. Quante cifre ha il prodotto $m \cdot n$?
 (A) 15 (B) 16 (C) 27 (D) 28 (E) 189.

26. Due uomini e due ragazzi vogliono attraversare un fiume usando una piccola canoa che può portare al massimo o due ragazzi o solo un adulto. Qual è il minimo numero di traversate necessario per trasportare dall'altra parte del fiume tutte le persone?
 (A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11 (E) 13.

27. Se ABCD è un rettangolo e k è una circonferenza con centro in A e passante per C, qual è la lunghezza della corda EF? (vedi figura).



- (A) 50 (B) $2\sqrt{20 \cdot 25}$ (C) $2\sqrt{37 \cdot 13}$ (D) 44 (E) 25.

28. Sommando numeratore e denominatore, quando essi siano ridotti ai minimi termini, del risultato della seguente espressione

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2001^2}\right)$$

si ottiene

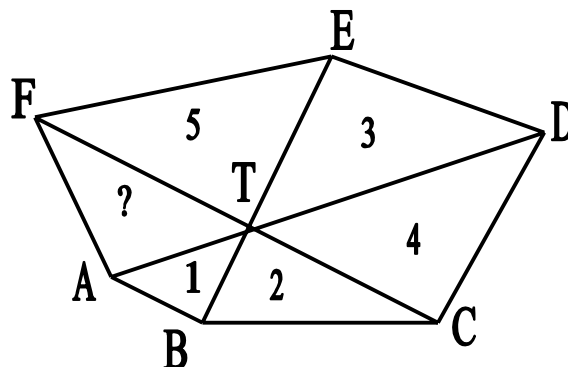
- (A) 2001 (B) 3002 (C) 4003 (D) 5002 (E) 6001.

29. Lo zio Marco ha pescato alcuni pesci. Dà i tre più grandi al suo cane, riducendo il peso totale della sua pesca del 35%. Dà poi i tre pesci più piccoli al suo gatto, riducendo il peso totale rimanente dei $5/13$. La famiglia mangia i restanti pesci per cena. Quanti pesci ha catturato lo zio Marco?



- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11
(E) 12.

30. Le diagonali AD, BE, CF di un esagono convesso ABCDEF passano tutte per uno stesso punto T. Quanto vale l'area del triangolo FAT, se le aree degli altri sono quelle indicate in figura?



- (A) $\frac{6}{5}$ (B) 3 (C) $\frac{10}{3}$ (D) $\frac{24}{5}$ (E) altro.